Two-sided tilting complexes for blocks with cyclic defect groups (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics)

数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 104-111

Two-sided tilting complexes for blocks with cyclic defect groups

東京理科大学 (Tokyo University of Science)
小境雄太 (Yuta Kozakai)

1 導入

k を代数的閉体とし，Γ 及び Λ を k 上の対称多元環とする．2つの対称多元環 Γ と Λ が導来同値であるための必要十分条件は，Γ 上の片側傾斜複体で，その自己準同型環が Λ と同型になるものが存在することであることが Rickard により [5] において示された．さらに，Γ-Λ-両側加群の両側傾斜複体が存在することも必要十分条件であることが Rickard により示された [7]．この片側傾斜複体，及び両側傾斜複体の定義は次で与えられる．

定義 1. [5] 対称多元環 Γ に対し，Γ-加群の有界な複体 T が片側傾斜複体とは，次の条件が成り立つときをいう．

1. T の各項が有限生成射影 Γ-加群.
2. 0 でない任意の整数 n に対して $\mathrm{Hom}_{D^b(\Gamma)}(T, T[n]) = 0$.
3. T の有限直和の直和因子たちが三角圏として $K^b(\Gamma\text{-proj})$ を生成する.

定義 2. [7] 対称多元環 Γ，Λ に対して Γ-Λ-両側加群の有界な複体 C が両側傾斜複体とは，次の条件が成り立つときをいう．ただし，$C^* = \mathrm{Hom}_k(C, k)$ とする．

1. C の各項が左 Γ-加群として有限生成で射影的.
2. C の各項が右 Λ-加群として有限生成で射影的.
3. Γ-Γ-両側加群の導来圏において $C \otimes_\Gamma C^* \cong \Lambda$.

考えている対称多元環が群環のとき，splendid 傾斜複体という両側傾斜複体が定義される．

定義 3. [7] p を素数とし，k を標数 p の代数的閉体とする．さらに有限群 G とその部分群 H が，シロー p-部分群 P を共有し，同じ p-局所構造を持つとする．kG の主ブロック A と kH の主ブロック B に対し，A-B-両側加群の両側傾斜複体 C が splendid 傾斜複体とは，次の条件を満たすときをいう．ただし，P の部分群 Q に対し，$\Delta Q = \{(q, q) \in G \times H | q \in Q\}$ とする．

1. A-A-両側加群のホモトピー圏において $C \otimes_B C^* \cong A$.
2. それぞれの項は,
$$\mathrm{Ind}_{\Delta Q}^{G\times H} k_{\Delta Q} \quad \exists Q \leq P$$
という形の置換加群の直和因子の直和になっている.

このsplendid傾斜複体が存在する利点としては，例えば次のようなものがある．

命題 4. [8] A, B は定義3のものとし，R を P の部分群とする．さらに，A', B' をそれぞれ $kC_G(R), kC_H(R)$ の主ブロックとする．このとき，A'-B'-両側加群のsplendid傾斜複体が存在する．すなわち，A' と B' は導来同値である．

Γ-Λ-両側加群の両側傾斜複体 C を Γ-加群の複体と見なしたとき，Γ の導来圏において C は Γ-加群の片側傾斜複体で，その自己準同型環が Λ になることが知られている．与えられた Γ-加群の片側傾斜複体に対し，そのような Γ-Λ-両側加群の両側傾斜複体が存在することはわかっているが，それを具体的な形で書くことは一般には難しい．

本稿では，巡回不足群を持つ主ブロックの場合に，2つの多元環の導来同値を誘導する片側傾斜複体に対応する両側傾斜複体，すなわち，片側加群の複体と見なしたときに与えられた片側傾斜複体と一致するような両側傾斜複体の構成を考察する．

以下，加群はすべて有限生成で断らない限り左加群とする．また，k-多元環上の加群 U に対して，U^* によって $\mathrm{Hom}_k(U, k)$ を表し，省略のため k 上のテンソル積 $\otimes_k$ を単に $\otimes$ で表すことにする．また，U の射影被覆 $\pi : P(U) \to U$ に対して，ΩU によって $\mathrm{Ker}\,\pi$ を表すことにし，帰納的に $\Omega^n U := \Omega(\Omega^{n-1}U)$ とおく．

2 主定理

p を素数，k を標数 p の代数的閉体，G を巡回シロー p-部分群 P を持つ有限群，$H := N_G(P)$ を G における P の正規化群とする．さらに A, B をそれぞれ kG, kH の主ブロックとする．主ブロックの不足群はシロー p-部分群になるので，A, B は不足群として巡回群 P を持つ．巡回群を不足群に持つブロックについては次の事実が知られている．

定理 5. 群環のブロックに対し，次の条件は同値である．

1. 巡回不足群を持つ．
2. Brauer樹木多元環である．

従って，定理5より A, B はBrauer樹木多元環となる．さらに，A と B のBrauer樹木は同じ辺の本数と同じ重複度を持つことが知られている[1]．以後，A 及び B のBrauer樹木の辺の本数，すなわち単純加群の同型類の完全代表系の個数を e とする．この2つの主ブロックについて，以下のことが知られている．

定理 6. [6][9]　A と B は導来同値である．

Rickard[6]はこの事実を A 上の片側傾斜複体で，その自己準同型環が B となるものを構成することで示した．一方，Rouquier[9]は，A と B の森田型安定同値を誘導する A-B-両側加群 M の射影被覆 $P \xrightarrow{\pi} M$ に対して，適当に P の直和因子 Y を取り，全射準同型 π を Y に制限することで両側傾斜複体 $0 \to Y \xrightarrow{\pi} M \to 0$ を構成した．Rouquierが構成した両側傾斜複体を A-加群の複体と見ても，Rickardが構成したものとは一般には一致しない．

Rouquierの両側傾斜複体は M の射影被覆から構成されたが，M の極小射影分解を利用して，A-加群の複体と見なしたときRickardが構成した片側傾斜複体に一致するような A-B-両側加群の両側傾斜複体は構成できないか試みた．そして次の定理を得た．

主定理 (Kozakai-Kunugi). p を素数，k を標数 p の代数的閉体，G を巡回シロー p 部分群 P を持つ有限群，$H := N_G(P)$ を P の G における正規化群とする．さらに A, B をそれぞれ kG, kH の主ブロックとする．このとき，A-B-両側加群の両側傾斜複体で，A-加群の複体とみなしたとき，A の導来圏で Rickard[6] により A 上の片側傾斜複体と一致するものが存在する．さらに，この両側傾斜複体は splendid 傾斜複体としてとることができる．

3 節でこの両側傾斜複体の構成法を述べ，4 節で $p = 7, G = \mathrm{SL}(2,7)$ の場合を例に Rickard[6] が構成した片側傾斜複体の例，及び今回構成した両側傾斜複体の例をみる．

3 両側傾斜複体の構成

この節では両側傾斜複体の構成法を述べる．2 節でも述べたように，A と B の森田型安定同値を誘導する A-B-両側加群の極小射影分解から求める両側傾斜複体を構成していく．S を A の Brauer 樹木において，例外頂点から 1 番遠い場所に位置する単純 A-加群とし，M を A と B の森田型安定同値を誘導する A-B-両側加群で，$M^* \otimes_A S$ が単純 B-加群となるもの，すなわち $M \otimes_B V \cong S$ を満たす単純 B-加群 V が存在するものとする．このような両側加群 M は存在する．実際，Rickard が構成した片側傾斜複体から誘導される，A と B の森田型安定同値を誘導する A-B-両側加群はこの条件を満たす．

3.1 準備

この節では Γ 及び Λ は有限次元対称多元環とする．また，M を Γ-Λ-両側加群で Γ と Λ の森田型安定同値を誘導するものとする．この M の極小射影分解を求めていく．

補題 7. [9] M の Γ-Λ-両側加群としての射影被覆は次で与えられる．

$$\bigoplus_W P(M \otimes_\Lambda W) \otimes P(W^*)$$

ただし，W は単純 Γ-加群の同型類の完全代表系全てを動く．

この命題により，M の両側加群としての射影被覆 $\pi : P(M) \to M$ が得られる．
次に $\Omega M := \mathrm{Ker}\,\pi$ の射影被覆を求める．

補題 8. M は Γ と Λ の森田型安定同値を誘導する Γ-Λ-両側加群とする．また，U を Λ-加群とする．このとき次が成り立つ．

1. ΩM は Γ と Λ の森田型安定同値を誘導する．
2. ある射影 Γ-加群 Q_1 が存在して $\Omega M \otimes_\Lambda U \cong \Omega(M \otimes_\Lambda U) \oplus Q_1$.
3. ある射影 Γ-加群 Q_2 が存在して $M \otimes_\Lambda \Omega U \cong \Omega(M \otimes_\Lambda U) \oplus Q_2$.

補題 9. [4] M は Γ と Λ の森田型安定同値を誘導する Γ-Λ-両側加群とする．また，W を単純 Λ-加群とする．このとき，$M \otimes_\Lambda W$ は直既約 Γ-加群である．

補題 8，補題 9 により，ΩM の射影被覆が再び補題 7 を用いて次の結果を得る．

$$P(\Omega M) \cong \bigoplus_{W} P(\Omega(M \otimes_{\Lambda} W)) \otimes P(W^*)$$

ただし，W は単純 Γ-加群の同型類の完全代表系全てを動く．

さらに，補題 8 は帰納的に用いることができるので，再び補題 9 と組み合わせて $\Omega^n M := \Omega(\Omega^{n-1}M)$ の射影被覆も得る．

$$P(\Omega^n M) \cong \bigoplus_{W} P(\Omega^n(M \otimes_{\Lambda} W)) \otimes P(W^*)$$

ただし，W は単純 Γ-加群の同型類の完全代表系全てを動く．

3.2 M の極小射影分解

この節では，3.1 節の事実を用いて，Rickard が構成した片側傾斜複体から誘導される，A と B の森田型安定同値を誘導する A-B-両側加群 M の極小射影分解を求めていく．

まず $H = N_G(P)$ の主ブロック B は次の性質を持つ．

命題 10. [1, Section 5] B は対称中山多元環である．

この命題より，任意の単純 B-加群 V に対して B の任意の単純加群は，同型を除いて一意的に $\Omega^{2i}V$ と表示できる．ただし $0 \leq i \leq e-1$ である．従って，非負整数 n に対して，A-B-両側加群 $\Omega^n M$ の射影被覆は，単純 B-加群 V を 1 つ固定し，補題 7 の W を $\Omega^{2i}V$ で置き換え，補題 8，補題 9 を用いることで次のように表示できる，ただし，$\Omega^0 M = M$ とする．

$$P(\Omega^n M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(M \otimes_B \Omega^{2i}V) \otimes P(\Omega^{2i}V^*) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i+n}(M \otimes_B V)) \otimes P(\Omega^{2i}V^*)$$

特に，A の Brauer 樹木において，例外頂点から 1 番遠い場所に位置する単純 A-加群 S を 1 つ固定し，単純 B-加群 V を

$$S \cong M \otimes_B V$$

を満たすものとする．この S と V を用いて，M の A-B-両側加群としての極小射影分解

$$\cdots \to P(\Omega^n M) \to \cdots \to P(\Omega M) \to P(M) \to M \to 0$$

は次のように表示できる．

$$\begin{aligned}
\cdots \xrightarrow{\pi_{n+2}} & \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i+n}S) \otimes P(\Omega^{2i}V^*) \\
\xrightarrow{\pi_{n+1}} & \cdots \\
\xrightarrow{\pi_3} & \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i+1}S) \otimes P(\Omega^{2i}V^*) \\
\xrightarrow{\pi_2} & \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i}S) \otimes P(\Omega^{2i}V^*) \\
\xrightarrow{\pi_1} & M
\end{aligned}$$

3.3 両側傾斜複体の構成

この節では，3.2 節で得られた M の極小射影分解を用いて両側傾斜複体を構成していく．

Brauer 樹木のそれぞれの辺 T に対し，自然数 $d(T)$ を，例外頂点から T に対応する辺の遠い方への頂点への最短のルートに用いる辺の個数とする．例えば例外頂点に隣接する辺の距離は 1 である．また，$d(T)$ の最大値，すなわち $d(S)$ を m とおく．

補題 11. M の極小射影分解と $1 \leq n \leq m-2$ に対して次の包含関係が成り立つ．

$$\pi_{n+1}\left(\bigoplus_{d(\mathrm{top}\Omega^{2i+n}S)\leq m-n-1} P(\Omega^{2i+n}S)\otimes P(\Omega^{2i}V^*)\right)\subset \bigoplus_{d(\mathrm{top}\Omega^{2i+n-1}S)\leq m-n} P(\Omega^{2i+n-1}S)\otimes P(\Omega^{2i}V^*)$$

この補題により，先ほどの極小射影分解のそれぞれの項から直和因子を取り除き，全射準同型をその直和因子に制限することで次の両側複体 C を得る．

$$\begin{aligned}
0 \to &\bigoplus_{d(\mathrm{top}\Omega^{2i+m-1}S)\leq 1} P(\Omega^{2i+m-1}S)\otimes P(\Omega^{2i}V^*)\\
\xrightarrow{\pi_{2i+m}}& \quad \cdots\\
\xrightarrow{\pi_3}& \bigoplus_{d(\mathrm{top}\Omega^{2i+1}S)\leq m-2} P(\Omega^{2i+1}S)\otimes P(\Omega^{2i}V^*)\\
\xrightarrow{\pi_2}& \bigoplus_{d(\mathrm{top}\Omega^{2i}S)\leq m-1} P(\Omega^{2i}S)\otimes P(\Omega^{2i}V^*)\\
\xrightarrow{\pi_1}& \quad M\\
\to 0&
\end{aligned}$$

この C について次のことが成り立つ．

命題 12. 両側複体 C は A-B-両側加群の両側傾斜複体で，A-加群の複体とみなしたとき，A の導来圏で Rickard[6] により A 上の片側傾斜複体と一致する．さらに，この両側傾斜複体は splendid 傾斜複体としてとることができる．

3.4 splendid 傾斜複体

A の Brauer 樹木において，例外頂点から 1 番遠い場所に位置する単純 A-加群が自明な単純加群 k_G であると仮定する．A の A-B-両側加群としての直既約因子でヴァーテックスとして $\Delta P := \{(x,x)|x\in P\}$ を持つものが一意的に存在するが，これを M とおけば，M は A と B の森田型安定同値を誘導する [2]．さらに，

$$M\otimes_B k_H \cong k_G$$

が成り立つ．よって，$S = k_G$，$V = k_H$ として M の極小射影分解から両側傾斜複体を構成することができる．このとき，M は $(k_{\Delta G})\uparrow^{G\times G}\downarrow_{G\times N_G(P)}$ の直既約因子で，その他の 0 でない項は A-B-両側加群として射影的であるので，splendid であることがわかる．

A の Brauer 樹木において，例外頂点から 1 番遠い場所に位置する単純 A-加群 S が自明な単純加群 k_G でない場合は，

$$\Omega^l k_G \cong S$$

を満たす $1 \leq l \leq 2e-1$ が存在するので，M を $\Omega^l M$ で置き換えれば，

$$\Omega^l M \otimes_B k_H \cong \Omega^l (M \otimes_B k_H) \cong \Omega^l k_G \cong S$$

を満たす．この $\Omega^l M$ の極小射影分解から，求める両側傾斜複体を得る：

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to \Omega^l M$$

ただし，P_i は $P(\Omega^{l+i} M)$ の適当な直和因子である．この両側傾斜複体は，A-B-両側加群の導来圏において次の複体と一致する：

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\varphi} P(\Omega^{l-1} M) \to P(\Omega^{l-2} M) \to \cdots \to P(M) \to M \to 0$$

ただし $\varphi : P_0 \to P(\Omega^{l-1} M)$ は，元々の微分 $P_0 \to \Omega^l M$ と埋め込み $\Omega^l M \to P(\Omega^{l-1} M)$ の合成で，

$$P(\Omega^{l-1} M) \to P(\Omega^{l-2} M) \to \cdots \to P(M) \to M \to 0$$

は M の極小射影分解を $P(\Omega^{l-1} M)$ で切り取ったものである．よって，先ほどと同様の議論により，$\Omega^l M$ の極小射影分解から得られた両側傾斜複体も splendid であることがわかる．

4 例

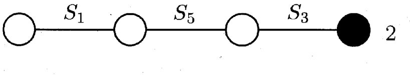
この節では，3.3 節の構成法に基づいて，体 k を標数 7，$G = \mathrm{SL}(2,7)$ の場合を例に構成する．G はシロー 7-部分群として，位数 7 の巡回群

$$P := \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

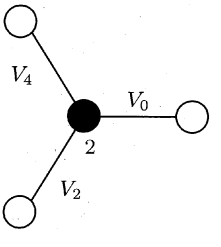
を持つ．また，この P の正規化群 $H := N_G(P)$ は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{F}_7 \right\}.$$

である．G, H は巡回シロー 7-部分群を持つので，kG, kH の主ブロックは Brauer 樹木多元環となる．kG の主ブロック A は 3 つの単純加群 $S_1 = k_G, S_3, S_5$ を持ち，以下の Brauer 樹木を持つ [1]．



kH の主ブロック B は 3 つの単純加群 $V_0 = k_H, V_2, V_4$ を持ち，以下の Brauer 樹木を持つ [1]．



Rickard[6] により，A と B は導来同値であることがわかるが，この証明は A 上の片側傾斜複体 T で，その自己準同型環が B となるようなものを構成することでなされた．T の構成は以下の通りである：

$$T = \bigoplus_{i=1,3,5} T_i$$

ただし，

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_1 & = & 0 & \to & P(S_3) & \to & P(S_5) & \to & P(S_1) & \to & 0 \\ T_3 & = & 0 & \to & P(S_3) & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\ T_5 & = & 0 & \to & P(S_3) & \to & P(S_5) & \to & 0 & \to & 0 \end{array}$$

であり，どの複体も $P(S_3)$ が次数 0 に位置するとする．

次に A-加群の複体と見なしたとき，A の導来圏で T と一致するような A-B-加群の両側複体 C を構成する．M として，A-A-加群 A の右の作用を B に制限したものをとる：$M :={}_A A_B$．このとき，$A \otimes_B k_H \cong k_G$ である．また，単純 B-加群について次の同型が存在する．

$$V_2 \cong \Omega^4 k_H, V_4 \cong \Omega^2 k_H$$

よって，3.2 節に基づいて M の極小射影分解を得る．

$$\begin{array}{ccccccc} & & P(k_G) \otimes P(V_2^*) & & P(k_G) \otimes P(k_H^*) & & \\ & & \oplus & & \oplus & & \\ \cdots \to & & P(S_5) \otimes P(k_H^*) & \to & P(S_5) \otimes P(V_2^*) & \to & {}_A A_B \\ & & \oplus & & \oplus & & \\ & & P(S_3) \otimes P(V_4^*) & & P(S_3) \otimes P(V_4^*) & & \end{array}$$

いま，3.3 節に基づき，$m = 3$ であることに注意して両側傾斜複体を構成すると次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P(S_5) \otimes P(V_2^*) & & \\ 0 & \to & P(S_3) \otimes P(V_4^*) & \to & \oplus & \to & {}_A A_B \\ & & & & P(S_3) \otimes P(V_4^*) & & \end{array}$$

ただし微分は元々の写像の，各直和因子への制限で与えられる．

参考文献

[1] J. L. Alperin, Local representation theory, Cambridge University Press (1986).

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras. Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992), 1–26, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 424, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[3] B. Keller, D. Vossieck, Sous les catégories dérivées. (French) [Beneath the derived categories] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987), no. 6, 225–228.

[4] M. Linckelmann, The isomorphism problem for blocks with cyclic defect groups, Inventions Math. 125 (1996) 87–100.

[5] J. Rickard, Morita theory for derived categories. J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[6] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence. J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), no. 3, 303–317.

[7] J. Rickard, Derived equivalences as derived functors. J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), no. 1, 37–48.

[8] J. Rickard, Splendid equivalences: derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. 72 (1996), 331–358.

[9] R. Rouquier, From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect. Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, 512-523, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 212, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.